MASTER EN TURISMO

INTRODUCCIÓN A LA ECONOMETRÍA

Curso 2011-2012

Prof. Dr. Juan José García del Hoyo

Estructura del Tema

1. Introducción

2. Estimadores mínimo-cuadráticos ordinarios (MCO)

3. Propiedades. Teorema de Gauss-Markov

4. Estimador de la varianza de las perturbaciones aleatorias

5. Bondad del ajuste

6. Predicción con el modelo clásico

7. Modelo con variables transformadas

Anexo: Otros procedimientos: estimación por máxima verosimilitud

1. INTRODUCCIÓN

En estas clases vamos a abordar el análisis del denominado Modelo de Regresión Lineal Clásico (MRLC). Este modelo nos permitirá, entre otras cosas, cuantificar las relaciones económicas de tipo lineal entre determinadas variables, como por ejemplo, el ahorro y la inversión, la demanda y el precio, la renta y el consumo, etc.

Se trata de un modelo econométrico y uniecuacional que verifica determinadas hipótesis que facilitan su estimación mediante técnicas sencillas. No obstante, estas hipótesis, bastante restrictivas "a priori", se relajarán en los próximos capítulos.

En esta sección pretenderemos plantear una estrategia para poder estimar el modelo, para lo cual será necesario especificar el modelo así como formular las principales hipótesis que, de cara a poder estimar convenientemente el modelo, tendrán que ser necesariamente formuladas

1. INTRODUCCIÓN

Formulación del modelo y técnica de estimación utilizada

Objetivo de la regresión

Estimar la relación funcional g entre dos variables X e Y

$$Y = g(X)$$

Variable dependiente, endógena o explicada

Variable independiente, exógena o explicativa

MODELO LINEAL SIMPLE

Modelo Determinista

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

Modelo Estocástico

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

Término de error o perturbación aleatoria

- ✓ Variables no incluidas
- ✓ Forma funcional incorrecta
- ✓ Comportamiento aleatorio de los individuos
- ✓ Errores de medida

1. INTRODUCCIÓN

Especificación del modelo

Especificación del
Modelo Lineal Simple

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

Información Muestral

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

Estimación del Modelo Poblacional

$$y_i = \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i}_{\hat{y}_i} + e_i$$

Elementos que intervienen en el modelo

Es una variable aleatoria cuyos valores dependen del muestreo

Variable endógena

Es una variable no aleatoria cuyos valores no dependen del muestreo

Variable exógena

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

Parámetros

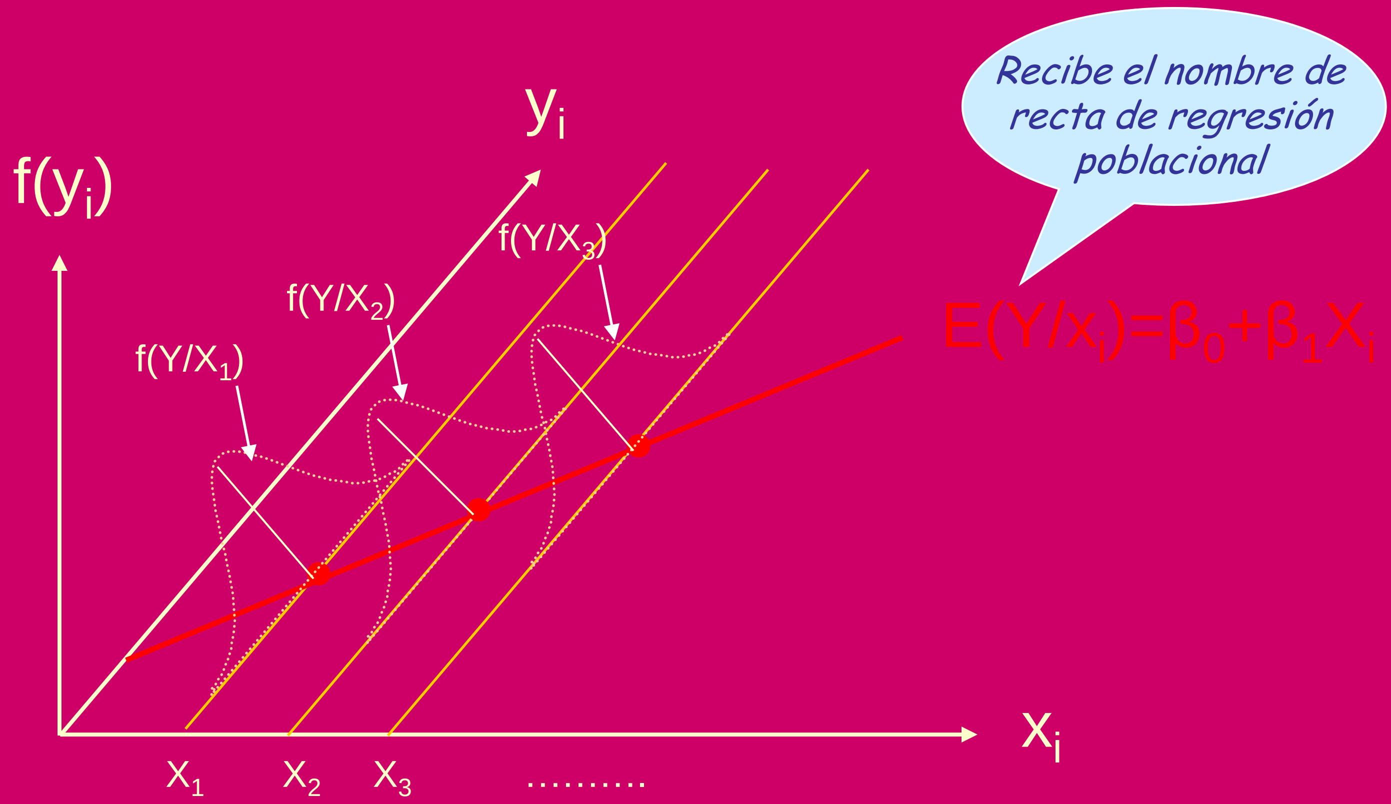
Son desconocidos pero se suponen constantes en toda la muestra

Perturbación

Es una variable aleatoria no observable i.i.d. con media nula y varianza constante

1. INTRODUCCIÓN

Representación gráfica del modelo



Regresión Lineal Mínimo-Cuadrática

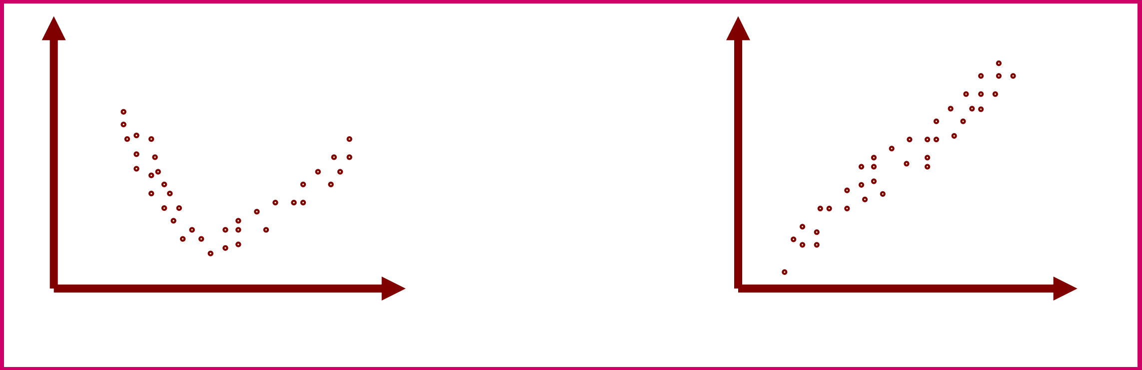
• El análisis de las relaciones existentes entre dos o más variables requiere en la mayoría de las ocasiones de tratamiento estadístico debido a que:

- La estructura verdadera de la relación no es conocida
- No existe dependencia funcional exacta entre las variables consideradas

• **Enfoques**

- **Grado de dependencia** → **Correlación**
- **Estructura de dependencia** → **Regresión**

• La elección de la familia de curvas apropiada de la distribución bidimensional es crucial, por lo que será necesario la elaboración de un Diagrama de Dispersión que permita inferir la misma.



• Supone que una distribución bidimensional responde a una familia de curvas lineales.

• Los parámetros de la recta de regresión lineal y*= ***a*** +***b***x resultan de la minimización de ϕ.

$$\phi = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}\left(y_j - a - b\cdot x_i\right)^2 n_{ij}$$

• La solución a este problema se obtiene mediante el denominado ***Sistema de Ecuaciones Normales*.**

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} y_j \cdot n_{.j} &= a\cdot N + b\cdot \sum_{i=1}^{h} x_i \cdot n_{i.}\\ \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} x_i\cdot y_j \cdot n_{ij} &= a\cdot \sum_{i=1}^{h} x_i\cdot n_{i.} + b\cdot \sum_{i=1}^{h} x_i^2\cdot n_{i.}\end{aligned}\right\}$$

$$b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \qquad a = \bar{y} - b\cdot\bar{x} = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\cdot\bar{x}$$

$$\text{Ec. Punto Pendiente}: \mathrm{y}_{\mathrm{j}} - \bar{\mathrm{y}} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}\cdot\left(\mathrm{x}_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{x}}\right)$$

• **Interpretación:** El parámetro ***a*** representa la ordenada en el origen, esto es el valor que toma la variable dependiente cuando la variable independiente toma el valor 0 y el parámetro ***b*** es la pendiente de la recta de regresión.

•A la diferencia entre el valor real de la variable (y) y el valor arrojado por la regresión mínimo-cuadrática (y*) se le denomina residuo (e). $Y_i = Y_i^* + e_i = a + bX_i + e_i, \quad i = 1,2,\ldots,N$

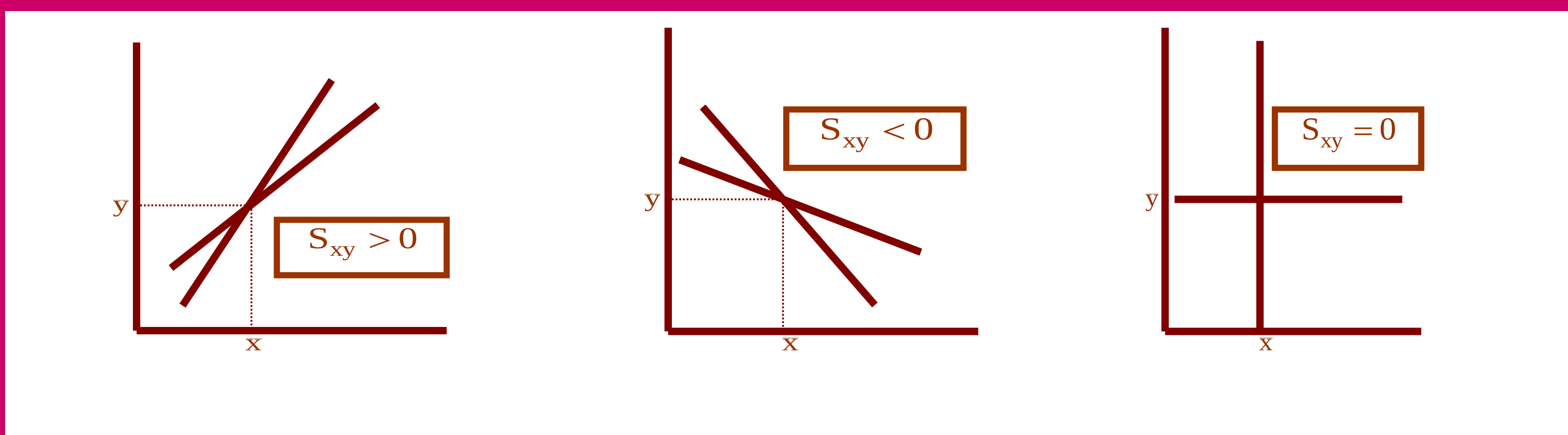
•La recta de regresión pasa por el centro de gravedad de la nube de puntos: (x, y)

•La suma de los residuos de una recta de regresión es siempre cero. $\sum e_i = 0$

• **El signo del parámetro *b* será el signo de la covarianza:**

- Si la covarianza es positiva (negativa) la pendiente de la recta de regresión lineal también lo es.

- Si la covarianza toma el valor cero, las rectas de regresión serán paralelas a los ejes de coordenadas.



Coeficiente de Correlación Lineal

• **Correlación: La correlación hace referencia al grado de dependencia mutua entre dos variables.**

La covarianza únicamente permitía establecer el tipo de dependencia entre las variables (directa e inversa). El coeficiente de correlación lineal no sólo permitirá determinar el tipo de dependencia sino que también nos servirá para calcular la intensidad de la dependencia entre las variables.

• **Coeficiente de Correlación Lineal:** ***r***

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y}$$

- **Campo de variación:** $-1 \leq r \leq +1$

- **Interpretación del Coeficiente de Correlación Lineal:**

-1< *r* < 0 ==> Correlación lineal negativa o inversa, siendo más intensa cuanto más próximo esté a –1.

0 < *r* <+1 ==> Correlación lineal positiva o directa, siendo más intensa cuanto más próximo esté a 1.

***r* = -1 ==> Correlación lineal perfecta negativa o inversa**. X e Y varían en sentidos opuestos. La recta de regresión es decreciente: $y_j - \bar{y} = -\frac{S_y}{S_x} \cdot (x_i - \bar{x})$

***r* = 1 ==> Correlación lineal perfecta positiva o directa**. X e Y varían en el mismo sentido. La recta de regresión es creciente: $y_j - \bar{y} = \frac{S_y}{S_x} \cdot (x_i - \bar{x})$

***r* = 0 ==> Correlación lineal nula**. La recta de regresión es de la forma:

$$y_j - \bar{y} = 0$$

• **Propiedades del Coeficiente de Correlación Lineal:**

1.- En caso de independencia entre dos variables, el coeficiente de correlación lineal es nulo debido a que en este caso la covarianza es nula.

$$X \text{ e } Y \text{ variables independientes} \implies S_{XY} = 0 \implies r = 0$$

2.- Si el coeficiente de correlación lineal es 0, NO podremos afirmar que existe independencia entre las variables estudiadas.

Bondad del Ajuste. Coeficiente de Determinación

- **El análisis de la regresión** se basa en el supuesto de que la información que suministra la variable sobre la que se regresa va a mejorar el conocimiento del comportamiento de la otra variable.
- Para ver en qué medida se alcanza este objetivo es necesario definir el concepto de **Varianza debida a la Regresión**.
  - Para ello, consideremos las tres variables que se obtienen en la regresión:
    - y_j **==> Valores observados de Y.**
    - y^*_j **==> Valores teóricos para cada** x_i en la regresión de Y sobre X.
    - $e_j = y_j - y^*_j$ **==> Conjunto de residuos o errores** generados en la regresión mínimo-cuadrática.

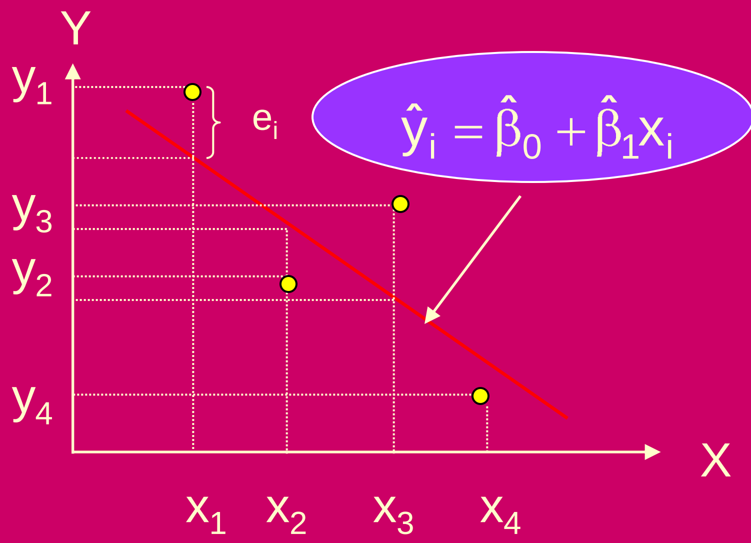
Ejemplo

Se dispone para una determinada ciudad costera española de los gastos (expresados en cientos de euros) de una muestra de familias que la han visitado junto con el número de personas que componen cada unidad familiar considerada. El Ayuntamiento está interesado en conocer si efectivamente los gastos de estas familias (variable Y) dependen del número de personas que componen la familia (variable X).

Gastos (en cientos de euros)	Nº de personas en la familia
12	5
15	6
17,5	6
20	7
30	8
35	9

a) Estimar la recta de regresión de Y sobre X.
b) Explicar el significado estadístico de los coeficientes de la línea ajustada.
c) Dibujar el diagrama de dispersión y representar la recta de regresión de Y sobre X.
d) Hallar el gasto realizado por una familia compuesta por 10 miembros. ¿Puede considerarse fiable la predicción obtenida?

2. ESTIMADORES MÍNIMO CUADRÁTICO ORDINARIOS (MCO)



El objetivo que nos planteamos será la búsqueda de aquellos estimadores que minimicen la suma de los cuadrados de los errores (SCE)

¿Por qué?

$$SCE = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \end{cases}$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i x_i = 0$$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\[2ex] \hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2} \end{cases}$$

Estas son las soluciones al problema de optimización consistente en la minimiz. de SCE

2. ESTIMADORES MÍNIMO CUADRÁTICO ORDINARIOS (MCO)

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_x^2}}$$

Modelo de Regresión Lineal Múltiple

2. ESTIMADORES MÍNIMO CUADRÁTICO ORDINARIOS (MCO)

Enfoque matricial

Modelo de Regresión Lineal Múltiple

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t \quad ; t = 1,2,\ldots,T$$

$$y = X\beta + \varepsilon$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_T \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{1T} & x_{2T} & \ldots & x_{kT} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

Formulación econométrica del modelo ⇒ $y = X\beta + \varepsilon$

Estimación del modelo propuesto ⇒ $\hat{y} = X\hat{\beta}$

Estimación de la perturbación aleatoria ⇒ $e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta}$

2. ESTIMADORES MÍNIMO CUADRÁTICO ORDINARIOS (MCO)

Enfoque matricial

"El objetivo consiste en localizar el conjunto de parámetros que minimizan el volumen de residuos (errores) que genera el modelo,definido a partir de la suma de los cuadrados de los errores (SCE)"

Función objetivo

$$SCE = \sum_{t=1}^{T} e_t^2 = e'e = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) = y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

ya que $\hat{\beta}'X'y = y'X\hat{\beta}$

Condición necesaria de mínimo

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{t=1}^{T} x_{1i} & \sum_{t=1}^{T} x_{2i} & \dots & \sum_{t=1}^{T} x_{ki} \\ \sum_{t=1}^{T} x_{1i} & \sum_{t=1}^{T} x_{1i}^2 & \sum_{t=1}^{T} x_{1i}x_{2i} & \dots & \sum_{t=1}^{T} x_{1i}x_{ki} \\ \sum_{t=1}^{T} x_{2i} & \sum_{t=1}^{T} x_{1i}x_{2i} & \sum_{t=1}^{T} x_{2i}^2 & \dots & \sum_{t=1}^{T} x_{2i}x_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{t=1}^{T} x_{ki} & \sum_{t=1}^{T} x_{1i}x_{ki} & \sum_{t=1}^{T} x_{2i}x_{ki} & \dots & \sum_{t=1}^{T} x_{ki}^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{\beta} = b = (X'X)^{-1}X'y = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \dots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} y_i \\ \sum_{t=1}^{T} x_{1i}y_i \\ \sum_{t=1}^{T} x_{2i}y_i \\ \dots \\ \sum_{t=1}^{T} x_{ki}y_i \end{pmatrix}$$

2. ESTIMADORES MÍNIMO CUADRÁTICO ORDINARIOS (MCO)

Enfoque matricial aplicado al MRLS

$$X'X = \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} x_t \\ \sum_{t=1}^{T} x_t & \sum_{t=1}^{T} x_t^2 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} y_t \\ \sum_{t=1}^{T} x_t y_t \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}`X'Y = \frac{1}{T^2 S_x^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{t} x_t^2 \sum_{t=1}^{t} y_t - \sum_{t=1}^{t} x_t \sum_{t=1}^{T} x_t y_t \\ -\sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{t} y_t + T\sum_{t=1}^{T} x_t y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\bar{x} \\ \frac{S_{xy}}{S_x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{T^2 S_x^2} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} x_t^2 & -\sum_{t=1}^{t} x_t \\ -\sum_{t=1}^{t} x_t & T \end{pmatrix}$$

3. PROPIEDADES. TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

Hipótesis en el Modelo de Regresión Lineal Clásico(MRLC)

1. SOBRE EL MODELO

"Entre la variable explicada Y y las variables explicativas $X_1, X_2, \ldots, X_k$ existe la siguiente relación"

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t \quad ; \quad t = 1, 2, \ldots, T$$

2. SOBRE LA PERTURBACIÓN ALEATORIA

"La perturbación aleatoria se distribuye con esperanza matemática nula y varianza constante y desconocida y las covarianzas entre pares de perturbaciones son nulas (hipótesis de ausencia de autocorrelación)"

$$E(\varepsilon) = E\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad VAR(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = E\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}\left(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \ldots \quad \varepsilon_T\right) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 I$$

3. SOBRE LA MATRIZ DE OBSERVACIONES X

"El rango de la matriz X debe coincidir con el número de columnas de dicha matriz. Además, el número de filas en X debe ser superior al número de columnas. Finalmente X es determinista".

3. PROPIEDADES. TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

Propiedades de los estimadores MCO en el modelo clásico

Esperanza matemática de b

$$E(b) = E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'y] = \beta \qquad \forall y = X\beta + \varepsilon$$

$$E(b) = E\left[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\right] = \beta + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) = \beta$$

"Bajo las hipótesis del modelo clásico, b es un estimador lineal e insesgado de los parámetros del modelo. Además, con independencia de que X sea o no estocástica, b es un estimador consistente y siempre que exista incorrelación contemporánea b será consistente, aunque se diera algún otro tipo de correlación"

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} P(\hat{\beta} - \beta > c) = 0 \qquad \forall c = \text{cte.positiva}$$

Varianza de b

$$VAR(b) = VAR(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = (X'X)^{-1}\sigma^2 I$$

$$V\hat{A}R(b) = V\hat{A}R(\hat{\beta}) = S^2(X'X)^{-1}$$

$$VAR(b) = E\left[\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)'\right] = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

"A través del Teorema de Gauss-Markov se demuestra que además de las propiedades de insesgadez y consistencia, el vector b es óptimo, es decir, es el de varianza mínima entre todos los estimadores lineales insesgados de los parámetros del modelo"

Todo lo último nos permite afirmar que nuestros estimadores MCO son ELIO, es decir, Estimadores Lineales Insesgados y Óptimos, o lo que es lo mismo, son los de menor varianza de entre todos los estimadores lineales insesgados posibles

3. PROPIEDADES. TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

Estimación de la varianza de los estimadores de los parámetros del modelo

Realizando las operaciones algebraicas oportunas podemos obtener las fórmulas que nos permiten obtener una estimación puntual de la varianza de los estimadores de los parámetros del modelo lineal simple, así como de la covarianza entre dichos estimadores

$$\hat{VAR}(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \right)$$

$$\hat{VAR}(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{COV}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\hat{\sigma}^2 \left(\frac{\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \right)$$

4. ESTIMADOR DE LA VARIANZA DE LA PERTURBACIÓN ALEATORIA

$$VAR(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad \forall i$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{SCE}{T-k-1} = \frac{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}{T-k-1}$$

Suma de los cuadrados de los errores o residuos

Ya que $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$

$$SCE = e'e = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) = y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} = y'y - \hat{\beta}'X'y$$

O también

$$SCE = y'y - \hat{\beta}'(X'X)\hat{\beta}$$

*"Bajo las **hipótesis** del modelo clásico S^2 es un estimador insesgado de la varianza de la perturbación aleatoria"*

No obstante, al no ser un estimador lineal, no es ELIO, aunque goza de las propiedades de insesgadez y consistencia asintótica

5. BONDAD DEL AJUSTE

A) Coeficiente de Determinación ⇨ $R^2 = \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{SCE}{SCT}$

$$\left.\begin{aligned} SCT &= \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \overline{y}\right)^2 \\ SCR &= \sum_{t=1}^{T}\left(\hat{y}_t - \overline{y}\right)^2 \\ SCE &= \sum_{t=1}^{T} e_t^2 \end{aligned}\right\} \quad SCT = SCR + SCE$$

Siempre y cuando exista término independiente

"R^2 mide, por tanto, la proporción de la varianza muestral de Y que es explicada por la varianza del modelo estimado"

B) Raiz del Error Cuadrático Medio (RECM)

$$\left\{\begin{aligned} RECM &= \sqrt{\frac{SCE}{T}} \\ (\%)RECM &= \frac{RECM}{\overline{y}} \cdot 100 \end{aligned}\right.$$

C) Error Standard debido a la regresión (E.S.) ⇨ $E.S. = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{SCE}{T-k-1}}$

5. BONDAD DEL AJUSTE

Consideraciones acerca del Coeficiente de Determinación

La obtención del coeficiente R^2 se basa en la siguiente descomposición de sumas de cuadrados

$$SCT = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2 = Y'Y - T\bar{Y}^2$$

SCT es la Suma de Cuadrados Totales y mide la variabilidad total de la variable endógena o explicada

$$SCR = \sum_{t=1}^{T} (\hat{y}_t - \bar{y})^2 = b'X'Y - n\bar{Y}^2$$

SCR es la Suma de Cuadrados Debida a la Regresión o explicados por el modelo

$$SCE = \sum_{t=1}^{T} e_t^2 = Y'Y - b'X'Y$$

SCE es la Suma de los Cuadrados de los Errores o Residuos y viene referida a la variabilidad de Y no explicada por el modelo

$$SCT = SCR + SCE$$

Este coeficiente nos permite seleccionar entre aquellos modelos con un mismo número de variables explicativas, aquel con una mayor capacidad explicativa. No obstante, dado que a medida que incorporamos más regresores R^2 se va haciendo mayor, necesitamos un coeficiente que permita la comparación entre modelos con diferente número de variables explicativas. A tal efecto, utilizaremos el denominado Coeficiente de Determinación Ajustado por Grados de Libertad, que penaliza el incremento de R^2 a medida que incorporamos más regresores.

$$R^2_{adj} = \bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{(T-1)}{(T-k-1)}$$

6. PREDICCIÓN CON EL MODELO CLÁSICO

Predicción puntual $\Rightarrow$ $\hat{y}_T = x'_T \cdot b \quad ; \quad x'_T = (1, x_{1T}, x_{2T}, \ldots, x_{kT})$

Error de predicción $\Rightarrow$ $e_T = y_T - \hat{y}_T = x'_T(\beta - b) + \varepsilon_T$

Variabilidad del error de predicción $\Rightarrow$ $VAR(e_T) = E(e_T \cdot e'_T) = x'_T VAR(b) x_T + \sigma^2$

Varianza estimada del error de predicción $\Rightarrow$ $\widehat{VAR}(e_T) = S^2(1 + X'_T(X'X)^{-1}X_T)$

Intervalo de predicción $\Rightarrow$ $y_T \in \left[\hat{y}_T \pm t^{\alpha/2}_{T-k-1}\sqrt{S^2(1 + X'_T(X'X)^{-1}X_T)}\right]$

7. MODELO CON VARIABLES TRANSFORMADAS

El Modelo Clásico con cambios de escala

Tratemos un caso bastante común en el que, a partir de las variables originales, realizamos un cambio de escala, que en este caso se traducirá en que multiplicamos a todos los valores de la endógena Y por una constante p, mientras que la matriz de observaciones de X se ve multiplicada por una matriz diagonal de transformaciones P en la que los elementos de la diagonal principal no tienen por qué ser necesariamente iguales entre sí

Ya que, entre otras cosas, P'=P

$$X^* = XP$$

$$y^* = py$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_k \end{pmatrix}$$

$$b^* = (X^{*\prime} X^*)^{-1} X^{*\prime} y^* = (P' X' X P)^{-1} P' X' y p = p P^{-1} b$$

$$VAR(b^*) = p^2 P^{-1} VAR(b) P^{-1}$$

$$SCE^* = p^2 SCE \quad ; SCT^* = p^2 SCT \quad ; SCR^* = p^2 SCR \quad ; R^{*2} = R^2$$

De esta forma, a partir de los coeficientes estimados para el modelo original, podemos determinar los correspondientes al modelo transformado

$$b_i^* = \frac{p}{P_i} b_i \quad ; i = 0, 1, 2, ..., k \quad ; P_0 = 1 \qquad S^2_{b_i^*} = S^2_{b_i} \frac{p^2}{P_i^2} \quad ; i = 1, 2, ..., k; \quad P_0 = 1$$

7. MODELO CON VARIABLES TRANSFORMADAS

El Modelo Clásico con datos centrados

$$b' = M_{xx}^{-1} M_{xy}$$

$$b'_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \ldots - b_k \bar{x}_k$$

$$V\hat{A}R(b') = S^2 M_{xx}^{-1}$$

$$SCE = \sum_{t=1}^{T} y_t^{*2} - b'(\text{trans.})M_{xy}$$

$$M_{xx} = \begin{bmatrix} \sum m_{1t}^2 & \sum m_{1t}m_{2t} & \ldots & \sum m_{1t}m_{kt} \\ \sum m_{2t}m_{1t} & \sum m_{2t}^2 & \ldots & \sum m_{2t}m_{kt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum m_{kt}m_{1t} & \sum m_{kt}m_{2t} & \ldots & \sum m_{kt}^2 \end{bmatrix}$$

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} \sum m_{1t} y_t^* \\ \sum m_{2t} y_t^* \\ \ldots \\ \sum m_{kt} y_t^* \end{bmatrix} ; m_{it} = x_{it} - \bar{x}_i \quad ; y_t^* = y_t - \bar{y}$$

"La estimación del modelo con datos centrados no afecta a la estimación de los parámetros del modelo ni a la estimación de las varianzas de los estimadores. Tan sólo simplifica los cálculos al evitar la primera fila y la primera columna de la matriz X'X con datos centrados"

ANEXO. OTROS PROCEDIMIENTOS DE ESTIMACIÓN: ESTIMACIÓN POR MÁXIMA VEROSIMILITUD

Suponiendo, tal y como se verá en un tema siguiente, que el término de error se distribuye normalmente con media nula y varianza constante ρ^2, entonces podemos llegar a las siguientes conclusiones interesantes

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

$$VAR(Y_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$$

$$COV(Y_i, Y_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

Ya que las perturbaciones aleatorias son independientes entre sí (incorrelación)

Al ser X determinsta, podemos concluir que los Yi son una secuencia de variables normales independientes e identicamente distribuidas (iid), por lo que podemos escribir

$$f(Y_i / \beta_0, \beta_1, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}$$

Dado que los Yi son independientes, podemos construir la función de verosimilitud:

$$L = f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n / \beta_0, \beta_1, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}$$

La aplicación del criterio de la máxima verosimilitud exige la maximización de dicha función. La obtención de las correspondientes derivadas parciales resulta más fácil si tomamos el logaritmo neperiano de la función de verosimilitud

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2$$

ANEXO. OTROS PROCEDIMIENTOS DE ESTIMACIÓN: ESTIMACIÓN POR MÁXIMA VEROSIMILITUD

Ahora estamos en condiciones de plantear las condiciones de primer orden para la maximización de la verosimilitud

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta_0} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2)\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2)\sum_{i=1}^{n}X_i(Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 X_i) = 0$$

que, en definitiva, nos conduce a la obtención del siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

que coinciden con las ecuaciones normales mediante las cuales obtuvimos en un apartado anterior los estimadores MCO del modelo lineal simple, lo cual nos permite afirmar que los criterios de máxima verosimilitud y de MCO proporcionan los mismos estimadores puntuales de los parámetros del modelo

Para la estimación de la varianza del término de error aplicaremos el mismo criterio, es decir

$$\frac{\partial LnL}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\tilde{\sigma}^2} + \frac{1}{2\tilde{\sigma}^4}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 X_i)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_i^2$$

lo que nos permite establecer que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_i^2}{2\tilde{\sigma}^4} = \frac{n}{2\tilde{\sigma}^2} \Rightarrow \tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{u}_i^2}{n}$$

¡Es sesgado!

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \frac{n-2}{n}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{2\sigma^2}{n} \neq \sigma^2$$

No obstante, es asintóticamente insesgado

La bibliografía sobre estas cuestiones es muy extensa. En muchos de los manuales de Econometría se aborda de manera precisa el desarrollo de la técnica de los MCO aplicada a la estimación del que se denomina Modelo de Regresión Lineal Simple. De cara a una mayor generalidad, hemos extendido en este capítulo la aplicación de la técnica de estimación al caso del modelo lineal en el que se incluyen k variables explicativas, por lo que es recomendable que el alumno se familiarice con el enfoque matricial lo antes posible. A modo de resumen, la bibliografía en castellano que puede consultar el alumno, entre una extensa relación de referencias, es la que mostramos a continuación

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Greene, W. H.*, (1998), Análisis Econométrico, 3ª edición, Madrid: Prentice Hall, págs. 193-259.*

Guisán Seijas, Mª del Carmen*, (1997), Econometría, Madrid: Mc Graw Hill, págs. 15-50.*

Martín, G. y otros*, (1997), Introducción a la Econometría, Madrid: Prentice Hall, págs. 4-88.*

Novales Cinca, A.*, (1993), Econometría, 2ª edición, Madrid: Mc Graw Hill, págs. 52-112.*

Pulido San Román, A.*, (1987), Modelos Econométricos, Madrid: Pirámide, págs. 105-124.*

Trívez Bielsa, F. J.*, (2004), Introducción a la Econometría, Madrid: Pirámide, págs. 125-160.*

Uriel, E. y otros*, (1990), Econometría: El Modelo Lineal, Madrid: AC, págs. 19-49.*